**3.7 משפט**

יהי מרחב דיסקרטי אזי המרחב הינו קומפטי והאוסדורף. וכן  *הינו קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך של .*

*הוכחה:*

*הוכחת האוסדורף-*

*תהיינה נקודות שונות, ז"א הם אולטרא פילטרים שונים.*

*ללא הגבלת כלליות יש עבורה וגם .*

*אזי אם ניקח את אזי .*

*ולכן קיבלנו כי הסביבות הפתוחות של הנקודות בהתאמה, המקיימות .*

*ולכן קיבלנו כי האוסדורף.*

הוכחת קומפקטיות-

יהי משפחה של קבוצות סגורות המקיימות את תכונת החיתוך הסופי.

היות ומתקיים לפי למה 3.3

אזי קיבלנו כי גם ולכן גם המשפחה מקיימת את תכונת החיתוך הסופי.

אם ניקח את האוסף

*היות* הרי ש .

וכן לכל

ולכן קיים

וכן אם וגם אזי  *ולכן גם*

ולכן נקבל כי המשפחה יוצרת פילטר על . נוכל להרחיב את את הפילטר לאולטרא פילטר (כל פילטר מוכל באולטרא פילטר(2.8))

אולטרא פילטר ולכן .

ברור כי לכל מתקיים .

ולכן .

ולכן קיבלנו כי .

ולכן קיבלנו כי לכל המקיים את תכונת החיתוך הסופי מתקיים . ולכן קומפקטית.

הוכחת קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך:

יהי התאמה רציפה כל שהיא, כאשר מרחב קומפקטי האוסדורף.( הינה דיסקרטית ולכן כל התאמה מ הינה רציפה.)

יהי אולטרא פילטר על .

נתבונן ב פילטר התמונה מעל (*שהוא הפילטר על שבסיסו(*2.2*) הוא אוסף הקבוצות מהטיפוס כאשר* ). אזי היות ו רציפה ולפי 2.11 נקבל כי אם מתכנס לאיזה שהוא נקודהy ב.

אם כן נוכל לבנות התאמה

*כך כאשר מקיים .*

*ואם נתבונן בהתאמה*

וכן היות  *(כי מכיל את כל הסביבות של )*

*והיות וf רציפה אזי לפי 2.11 מתקיים:*

ולכן מהגדרת מתקיים

נראה כעת כי רציפה.

יהי ויהי סביבה פתוחה של . ונמצא קבוצה פתוחה כך ש-.

היות ו מרחב רגולרי אזי קיימת סביבה פתוחה של כך שמתקיים

בנוסף הקבוצה הינה קבוצה פתוחה( רציפה) וכן

ולכן ומכאן שזה הרי אומר ש- .

על מנת להראות ש נראה כי כי .

נניח בשלילה כי קיים כך ש .

אזי ולכן .

והיות והקבוצות זרות נקבל כי:

אבל זה בסתירה שאולטרא פילטר(אינה מכילה את הקבוצה הריקה.)

ולכן הנחת השלילה שגויה. ולכן קיבלנו כי *.*

*ולכן קיבלנו כי רציפה.*

*נוכיח את יחידות ההרחבה*

*אם רציפה המקיימת*

*אזי לכל מתקיים .*

*כלומר לכל מתקיים .*

*אם כן ו מתלכדות על התת קבוצה שהיא צפופה בומאחר ש האוסדורף נובע כי (5.11 בספר)*

*ומכל האמור קיבלנו כי קומפקטיפיקציית סטון צ'ך מעל . מש"ל.*